



Aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem em vibrações mecânicas e o software *Modellus* como ferramenta didática

Maria Ivonete Nunes Costa¹, Jeovan Lira dos Santos²

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Materiais, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Teresina Central, Teresina, PI, Brasil.

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Oeiras, Teresina, PI, Brasil.

RESUMO

Introdução. O estudo e modelagem de sistemas físicos frequentemente envolvem o uso de equações diferenciais. Um exemplo notável é o comportamento das vibrações mecânicas, que é descrito por uma equação diferencial linear de segunda ordem. Devido à sua natureza abrangente e à variedade de conceitos, tipos de equações e métodos de resolução, muitos alunos enfrentam dificuldades significativas ao lidar com essas equações. **Objetivo.** O objetivo deste trabalho é explorar e compreender os conceitos físicos e matemáticos envolvidos no estudo das vibrações mecânicas através de modelagem e simulação interativas. **Metodologia.** Utilizou-se o software *Modellus*, que proporciona uma maneira intuitiva de visualizar e analisar o comportamento de sistemas físicos. Por meio de análises gráficas, foram estudados os movimentos vibratórios, incluindo os casos de vibração harmônica simples e amortecida. **Resultados e Discussão.** Os resultados obtidos demonstraram a eficácia do uso do software na facilitação da interpretação de conceitos complexos, e as simulações interativas permitiram a visualização de como o comportamento dos sistemas vibratórios são afetados com variação de diferentes parâmetros, proporcionando uma análise mais aprofundada dos fenômenos. **Considerações Finais.** A utilização de ferramentas didáticas como o *Modellus* pode desempenhar um papel importante no ensino e na aprendizagem, tornando o processo mais acessível e envolvente para os alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais Lineares 2ª Ordem. Vibrações Mecânicas. *Modellus*.

Applications of second order linear differential equations in mechanical vibrations and the *Modellus* software as a teaching tool

ABSTRACT

Introduction. The study and modeling of physical systems often involves the use of differential equations. A notable example is the behavior of mechanical vibrations, which is described by a second-order linear differential equation. Due to their comprehensive nature and variety of concepts, types of equations, and solving methods, many students face significant difficulties when dealing with these equations. **Objective.** The objective of this work is to explore and understand the physical and mathematical concepts involved in the study of mechanical vibrations through interactive modeling and simulation. **Methodology.** *Modellus* software was used, which provides an intuitive way to visualize and analyze the behavior of physical systems. Through graphical analyses, vibratory movements were studied, including cases of simple and damped harmonic vibration. **Results and discussion.** The

Correspondência dos Autores

¹ORCID: [0009-0003-1930-2615](https://orcid.org/0009-0003-1930-2615). Email: mivonetenes@gmail.com

²ORCID: [0009-0001-5616-7606](https://orcid.org/0009-0001-5616-7606). Email: jeovanlira@ifpi.edu.br (Autor correspondente)

Artigo submetido a sistemas de verificação de similaridade

Submetido 22/11/2023 – Aceito 07/03/2024 – Publicado 15/04/2024

results obtained demonstrated the effectiveness of using the software in facilitating the interpretation of complex concepts, and the interactive simulations allowed the visualization of how the behavior of vibrating systems is affected by varying different parameters, providing a more in-depth analysis of the phenomena. **Final considerations.** The use of teaching tools such as Modellus can play an important role in teaching and learning, making the process more accessible and engaging for students.

KEYWORDS: 2nd Order Linear Differential Equations. Mechanical Vibrations. Modellus.

1 INTRODUÇÃO

Em diversas áreas do conhecimento existem tipos de problemas, tais como, físicos, químicos, biológicos e na própria engenharia, frequentemente necessitam de uma ferramenta que possa descrever ou modelar o comportamento de alguns sistemas ou fenômenos diferentes em termos matemáticos. Para isso, alguns modelos matemáticos são de grande valia, pois por meio deles torna-se possível identificar as variáveis responsáveis pelas mudanças do sistema e levantar as hipóteses possíveis. Nesse sentido, as equações diferenciais constituem uma parte muito importante, visto que, ao serem modeladas obtêm-se como resultado uma expressão que envolva a variável tempo, onde a solução para esse tipo de problema, está associado ao estado do sistema (Zill; Cullen, 2010).

O avanço da Física e das demais áreas de Ciências Naturais está intrinsicamente relacionado ao estudo das equações diferenciais. A necessidade de modelar situações e fenômenos reais utilizando como ferramenta a Matemática, surgiu a partir de muitas observações. Essas observações permitiram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento, assim, sendo possível empregar cálculos em novos fenômenos, possibilitando novas equações e descobertas. A exemplo disso, temos as equações de movimentos dos fluidos, das oscilações de um sistema vibratório, da termodinâmica, dentre outros. Em vibrações mecânicas, as equações diferenciais podem ser utilizadas para descrever o movimento de corpos que oscilam em torno de uma posição de equilíbrio (Boyce; DiPrima, 2010).

A maioria dos alunos apresentam dificuldades na interpretação de fenômenos físicos mais complexos que envolva equações diferenciais, seja na interpretação conceitual, na resolução de problemas ou na compreensão de algumas aplicações práticas. A discussão sobre a teoria por trás dessas equações, incluindo definições, classificações e métodos de solução, como a equação característica e o método dos coeficientes indeterminados, é crucial para entender como resolver problemas práticos. Nessa perspectiva, abordagem prática e interativa através do software Modellus é uma ferramenta educacional utilizada para auxiliar os alunos na compreensão das EDs lineares de 2ª ordem, especialmente no contexto das vibrações mecânicas. A modelagem e simulação dos movimentos vibratórios, incluindo vibrações harmônicas simples, amortecidas e forçadas, tornar os conceitos abstratos mais acessíveis e visuais, permitindo explorar e experimentar de forma mais intuitiva o comportamento dos sistemas físicos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações diferenciais

As equações diferenciais desempenham um papel fundamental no estudo das vibrações mecânicas, pois descrevem o comportamento de sistemas vibratórios ao longo do tempo. Essas vibrações envolvem o movimento periódico de objetos, como molas, pêndulos, sistemas de massa-mola, e muitos outros sistemas físicos (Zill; Cullen, 2010).

As equações de segunda ordem são frequentemente usadas para descrever o comportamento de sistemas vibratórios, como molas, massas e amortecedores. Essas equações têm a seguinte forma:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (2.1)$$

onde t é a variável independente, y'' corresponde a derivada segunda, y' a derivada primeira, y é a variável dependente e as funções a , b , c e d são funções específicas da variável t . Dividindo a equação (2.1) por $a(t)$, obtemos a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (2.2)$$

Quando a função $d(t)$ na equação (2.1), ou $g(t)$ na equação (2.2), for igual a zero para todo t , a equação será chamada de homogênea, caso contrário ela será dita não homogênea.

Resolver uma equação diferencial da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ não é uma tarefa muito simples. Primeiramente determina-se a solução para a homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, que será chamada de equação homogênea associada à equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$. Em seguida, uma vez resolvida a equação homogênea associada, sempre é possível resolver a equação não homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

O movimento livre, sem amortecido e harmônico, são descritos por uma equação do tipo homogênea. O movimento livre amortecido e os movimentos forçados, com e sem amortecimento, são descritos por a equação não homogênea.

2.2 Vibrações mecânicas

As vibrações são um fenômeno comum e essencial em diversas áreas da ciência, engenharia e até mesmo na compreensão do funcionamento do corpo humano. O estudo das vibrações é essencial para projetar estruturas que sejam capazes de resistir a cargas dinâmicas, como ventos, terremotos e vibrações mecânicas. Diversas situações cotidianas são descritas por fenômenos vibracionais, pode-se mencionar a presença de vibrações mecânicas em alguns sistemas do corpo humano, tais como o sistema cardíaco, na realização dos batimentos cardíacos, e no sistema repertório, através da associação da respiração com a vibração dos pulmões. Além disso, em engenharia verifica-se aplicações da vibração, em projeto de máquinas, motores, fundações, turbinas e sistemas de controle (Rao, 2008).

As vibrações são oscilações de um sistema mecânico ou estrutural em relação à posição de equilíbrio (Kelly, 2017), iniciam-se quando um elemento de inércia é deslocado de sua posição de equilíbrio em decorrência de uma força externa inserida no sistema. Segundo Rao (2008), vibração ou oscilação é definida como qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo. A equação do movimento livre sem amortecimento, é a primeira etapa para investigação de sistemas vibratórios mais complexos. Esse sistema é composto por uma mola, na qual despreza-se a massa e o amortecimento, e um corpo de massa que não sofre deformação quando é submetido à ação de qualquer força. A mola possui propriedades elásticas e obedece a lei de Hooke (Rao, 2008).

2.2.1 Movimento harmônico simples

O sistema massa-mola é caracterizado como harmônico devido à realização de movimento oscilatório e periódico, em que a força restauradora é diretamente proporcional à posição do objeto e atua na direção oposta à posição. Esse tipo de movimento é descrito por uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

A solução geral do movimento do sistema massa-mola é dada por função senoidal do tempo, geralmente na forma de seno ou cosseno. Portanto, temos

$$x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) \quad (2.4)$$

em que A corresponde ao deslocamento máximo relativo da posição de equilíbrio, denominado amplitude, ω frequência angular e φ a constante de fase ou fase inicial.

Segundo Halliday e Resnick (2016), todo movimento que se repete a intervalos regulares é denominado movimento periódico ou movimento harmônico. Esse movimento leva um mesmo intervalo

de tempo para ir e voltar à posição de equilíbrio, assim, é muito importante determinar as grandezas, frequência e o período.

O período de vibrações livres é o tempo necessário para completar um ciclo, dado por $T = 1/f$, em que f frequência, cuja frequência é dada por $f = \omega/2\pi$.

Quanto a energia do movimento harmônico simples é continuamente transformada entre energia cinética (associada ao movimento do objeto) e energia potencial (associada à posição do objeto em relação à posição de equilíbrio). Enquanto a energia total (E) do sistema é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude e independente do tempo, isto é, a energia é conservada, dada pela equação:

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2 \quad (2.5)$$

2.2.2 Movimento Amortecidos

Em mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência de velocidade instantânea (Zill, 2016). Os movimentos amortecidos referem-se a oscilações ou vibrações que diminuem gradualmente com o tempo devido à presença de forças dissipativas, como atrito ou resistência do ar. Esse tipo de movimento ocorre em sistemas onde há uma força de amortecimento que atua contra o movimento oscilatório, convertendo a energia mecânica do sistema em outras formas de energia, como calor. A equação de movimento é expressa pela equação diferencial abaixo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.6)$$

onde b é a constante de amortecimento no sentido positivo e o sinal negativo indica que a força atua na direção oposta ao movimento. Em outras palavras, a constante de amortecimento b deve ser positiva para que a força seja resistiva, isto é, para ocorrer a dissipação da energia do sistema. Então, se $b < 0$, a força atuaria para aumentar a velocidade do sistema em vez de diminuí-la.

Existem três regimes principais de oscilações amortecidas, dependendo das relações entre os parâmetros b , m e k . Subamortecido – a amplitude das oscilações diminui gradualmente com o tempo, mas o sistema continua oscilando, amortecimento crítico – o sistema retorna rapidamente à posição de equilíbrio sem oscilações, atingindo um equilíbrio estável o mais rápido possível e superamortecido – o sistema se move em direção à posição de equilíbrio sem oscilar, mas mais lentamente do que no caso de amortecimento crítico.

2.2.3 Movimento forçado Com Amortecimento

No movimento forçado com amortecimento ocorre quando um sistema é sujeito a uma força externa periódica, mas também possui forças dissipativas, como o atrito, que atuam para amortecer as oscilações do sistema. A equação diferencial que descreve o movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.7)$$

A solução equação é influenciada pela relação entre os parâmetros de amortecimento (b), massa (m) e constante elástica (k), bem como pela natureza específica da força externa aplicada. Vale ressaltar, a expressão (2.7) é uma equação não-homogênea, em que a determinação de sua solução é necessária o uso do método dos coeficientes indeterminados.

2.2.4 Movimento Forçado Sem Amortecimento

Em vibração forçada sem amortecimento a presença de forças externas $F(t)$ que excitam o sistema, provocado por uma energia externa que persiste durante o tempo em que o movimento vibratório existir, cuja energia pode ser ocasionada por uma força aplicada ou por um deslocamento imposto. Vale ressaltar que nos sistemas não-amortecidos não ocorre a dissipação de energia, sendo descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = F(t) \quad (2.8)$$

se a força externa $F(t)$ for uma função senoidal do tempo, a equação assume a forma:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \gamma t \quad (2.9)$$

em que F_0 é uma constante e $\gamma \neq \omega$.

A expressão (2.9) é uma equação diferencial não-homogênea. Portanto, para obter a solução é necessário definir uma solução particular e uma complementar, de tal maneira que, a solução será

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin \omega t + \sin \gamma t), \omega \neq \gamma \quad (2.10)$$

2.3 Modellus

O Modellus foi desenvolvido por Veit e Teodoro (2002) na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. O programa é uma ferramenta cognitiva que auxilia na integração do conhecimento simbólico que requer conhecimento prévio no processo de aprendizagem. O Modellus é um método atrativo e estimulador, podendo ser utilizado tanto pelo professor quanto pelo aluno. O professor pode usar para apresentar e ilustrar um determinado assunto e o aluno como recurso para explorar um modelo matemático de um dado fenômeno físico, modificando parâmetros, condições iniciais e outros aspectos. As principais funções do software são: realizar cálculos numéricos baseados em equações e dados especificados pelo usuário; apresentar os resultados na forma de gráficos e tabelas; facultar a montagem de animações; fazer medidas de distâncias e ângulos sobre uma imagem. Nesse trabalho iremos observar especificamente o comportamento dos movimentos osciladores, assim as discussões serão apenas nas janelas que foram utilizadas.

Amorim (2018) demonstrou a eficácia da utilização do software Modellus como auxílio ao ensino de Física. Em seu trabalho investigou o conceito de aprendizagem significativa, comparando dois métodos de ensino de Física em sala de aula tradicional e com o uso Modellus, quando trabalhado os temas abordados em cinemática: movimento e repouso, trajetórias, movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado e lançamento oblíquo.

Quando o aluno se depara com novas situações-problema e consegue descobrir seus próprios erros no processo de pesquisa do fenômeno por meio de simulações, passa a buscar novas alternativas, como modificar os parâmetros que controlam a situação-problema em estudo, assim, desenvolvendo habilidades de raciocínio e expandindo a capacidade de comunicação e argumentação (Costa Junior; Silva; Brito, 2011).

Existem duas formas de utilizar Modellus em atividades de ensino aprendizagem: exploratória e expressional. A primeira, os alunos investigam um tópico de interesse usando modelos e representações desenvolvidas por outros (por exemplo, seus professores), no estudo do conteúdo desejado, as questões, hipóteses, planos de trabalho e suas próprias conclusões sobre os dados que foram propostos para serem obtidos. No modo expressional, os alunos constroem seus próprios modelos e determinam como representar seus resultados. Aqui, o Modellus desempenha o papel de ferramenta de modelagem, proporcionando aos alunos amplo espaço para exploração e intervenção. Uma combinação das duas abordagens também pode ser utilizada, por exemplo, os alunos são orientados a modificar um modelo criado pelo professor para adaptá-lo a uma nova situação (Sousa Filho, 2020).

3 METODOLOGIA

O Modellus no ensino aprendizagem foi utilizado de modo expressivo, assumindo o papel de ferramenta de modelagem, que dá ao estudante amplo espaço de exploração e intervenção. A modelagem matemática dos problemas foi resolvida de forma analógica e utilizando o programa para análise gráfica do comportamento dos movimentos harmônico simples e harmônico amortecido.

O software é bem simples e prático, com o ambiente definido em forma de janelas. O sistema composto por quatro janelas principais: Modelo Matemático, Gráfico, Tabela e Notas. Além de uma barra de funções: Início, Variável independente, Modelo, Gráfico, Tabela, Animação e Notas, conforme exposto na Figura 1.

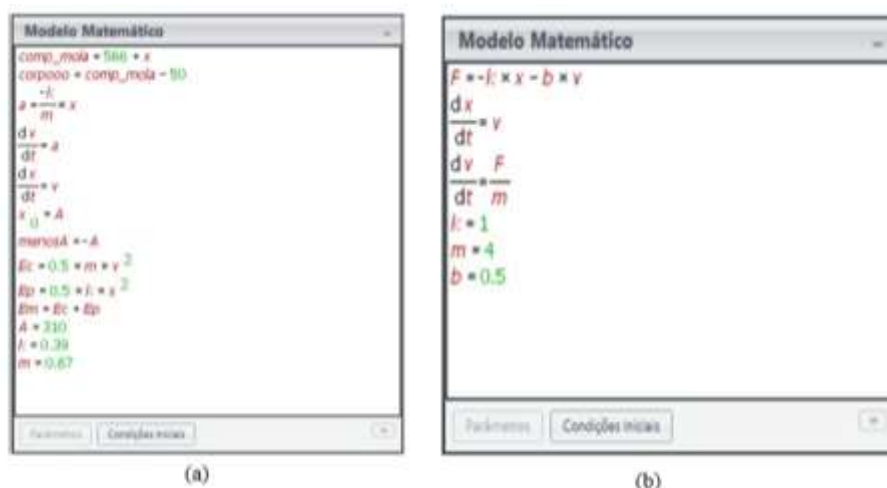
Figura 1: Tela inicial capturada a partir do software Modellus 4.01.



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

A janela modelo matemático é a onde se inserem os modelos ou fórmulas matemáticas, no nosso caso, as equações do movimento harmônico simples e amortecido, que são descritos por equações diferenciais lineares de segunda ordem, como mostrado na Figura 2.

Figura 2: Modelo matemático: (a) movimento harmônico simples e (b) movimento amortecido disponível no software Modellus.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

As variáveis são mostradas em vermelho itálico e os números são exibidos em texto normal coloridos em verde. Qualquer caractere alfanumérico (letras de a a z e números de 0 a 9, ou o caracter _) que comece com uma letra (por exemplo: F2_x) pode ser usado para definir uma variável. Modellus diferencia maiúsculas de minúsculas, então T não é o mesmo que t. Por padrão, o variável independente que representa o tempo é t. Os modelos interativos dos sistemas físicos especificando podem ser

manipulados em tempo real para observar como as mudanças nas variáveis afetam o sistema. Para isso, basta um click na opção parâmetros para fornecer valores para cada um dos termos envolvidos na função, possibilitando a coleta de dados obtenção dos resultados, disponíveis nas janelas tabela e gráfico, respectivamente. Além disso, é possível a interpretação dos fenômenos físicos resultados referente ao modelo matemático inserido. No caso da janela nota, é normalmente utilizada para registrar comentários, questionários ou instruções acerca do modelo.

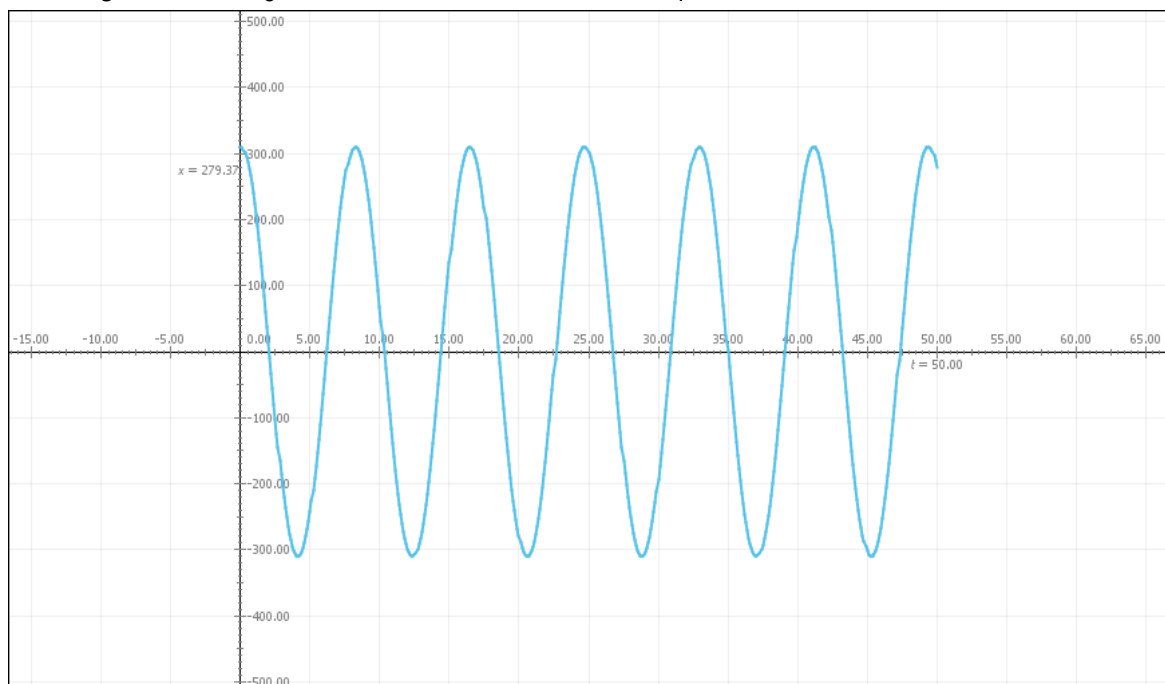
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O *Modellus* desempenha um papel significativo no ensino e aprendizagem de equações diferenciais. No contexto de equação diferencial linear de 2ª ordem apresenta muitos benefícios como, a visualização de conceitos abstratos, permitindo que os alunos criem representações visuais dinâmicas, facilitando a compreensão de características complexas. Além disso, podem se envolver na criação e manipulação, a partir da exploração ativa.

4.1 Harmônico Simples

No sistema harmônico simples o movimento não cessará com o tempo. Isso porque, a energia não foi pedida e nem dissipada por atrito ou resistência durante o movimento oscilatório. Contudo, essa situação não representa um caso real encontrado na natureza, considerado ideal. Na Figura 3 (posição x em função de tempo t) é mostrado a modelagem do movimento harmônico simples, considerando o modelo descrito na Figura 2a,

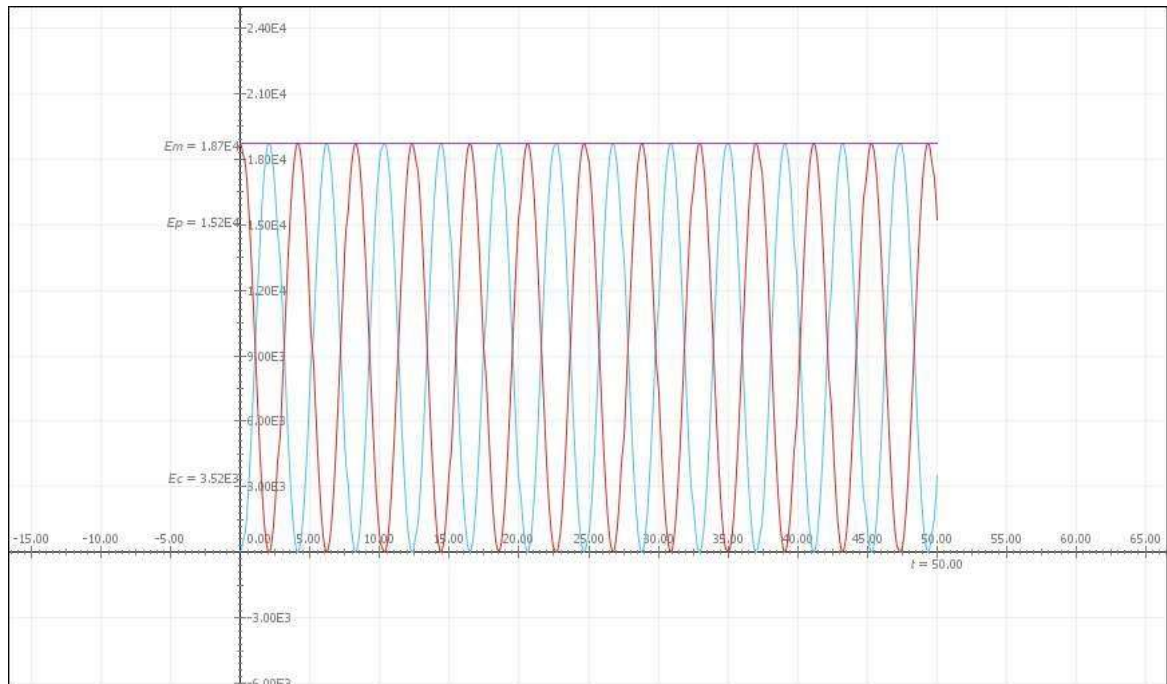
Figura 3: Modelagem de um Movimento Harmônico Simples resultante do software Modellus.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Quando a energia total do oscilador harmônico é dada pelo somatório das energias cinética e potencial. Na Figura 4, é ilustrado o comportamento das energias existentes no sistema massa-mola: a energia cinética (azul), energia potencial (vermelho) e energia mecânica (roxo).

Figura 4: Energias do Movimento Harmônico Simples resultante do software Modellus.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

A partir gráfico resultante pode-se verificar que a energia total (mecânica) do sistema é constante no tempo, dependendo apenas da amplitude. Entretanto, a energia cinética e potencial intercambia-se, ou seja, quando a energia cinética é máxima a energia potencial é mínima e vice-versa. A energia torna-se constante por causa do processo de inversão das energias com relação a amplitude do movimento.

Para demonstrar o Movimento harmônico simples, usamos o exemplo a seguir:

Determinar o modelo matemático que descreve o sistema massa-mola requer a identificação das forças presentes no sistema. (elástica, alongamento e gravitacional), assim, aplicando a segunda lei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_k + \vec{F}_s + \vec{F}_g = m \cdot \vec{a}$$

onde a força de alongamento e gravitacional como estão em equilíbrio anulam-se. Logo, $m \frac{d^2y}{dt^2} = -kx$, onde $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{x}$ é a aceleração do corpo. Logo, fazendo as devidas substituições, temos a dedução do movimento livre sem amortecido,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.1)$$

Então, podemos observar que a equação de movimento do oscilador simples é uma equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea, para resolvê-la, primeiramente devemos determinar a equação característica.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.2)$$

Considerando a exponencial e^{rt} como solução particular da equação $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = [e^{rt}]'' + \omega^2 [e^{rt}]$$

$$r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0$$

$$(r^2 + \omega^2) e^{rt} = 0$$

$$(r^2 + \omega^2) = 0 \rightarrow r^2 = -\omega^2$$

A solução da equação $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ são complexas $r_1 = \omega i$ e $r_2 = -\omega i$. Assim, para transformar essas raízes complexas em reais vamos aplicar a fórmula de Euler.

$$\begin{cases} x_1 = e^{i\omega t} \\ x_2 = e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Logo em termos exponencial, temos como solução geral:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Podemos expressar a solução geral em termos trigonométricos. Para isso, usamos a fórmula de Euler¹, onde $e^{rt} = \cos(rt) + i\sin(rt)$, então:

$$\begin{cases} x_1 = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \\ x_2 = e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são soluções particulares. Para determinarmos a solução $\bar{x}_1$ a grosso modo, usamos a adição das duas soluções x_1 e x_2 ,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \\ \bar{x}_1 &= 2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

E para a solução $\bar{x}_2$ subtraímos soluções x_1 e x_2 ,

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) - [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \\ \bar{x}_2 &= 2i\sin(\omega t) \end{aligned}$$

A solução geral que descreve o movimento do sistema massa-mola é descrita abaixo:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \quad (4.3)$$

A equação de movimento do sistema massa-mola (3), pode-se escrever de forma mais sucinta. Portanto, seja

$$\begin{cases} c_1 = A \cos \varphi \\ c_2 = A \sin \varphi \end{cases}$$

onde A e φ são constantes arbitrárias que devem ser determinadas. Logo, substituindo essas expressões na Eq. (3), obteremos

$$x = A \cos \varphi \cos(\omega t) + A \sin \varphi \sin(\omega t)$$

aplicando a identidade trigonométrica $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, a equação fica da seguinte forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.4)$$

em que A corresponde ao deslocamento máximo relativo da posição de equilíbrio, denominado amplitude, ω frequência angular e φ a constante de fase ou fase inicial.

Podemos obter a relação da energia total do oscilador e a amplitude do movimento. Utilizando a Equação $T = 1/f$ para $x(t)$, encontramos a energia cinética do sistema

¹ Leonhard Euler (1707-1783). Físico, teólogo, astrônomo, linguista, psicólogo e principalmente matemático, considerado gênio do século, nasceu em Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707 e morreu de derrame cerebral em São Petersburgo em 18 de setembro. Euler em matemática fez contribuições permanentes na álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculos, cálculos de variações, equações diferenciais, variável complexa, teoria dos números e tipografia.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

A energia potencial do sistema é dada por:

$$U = \frac{1}{2} m x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Portanto, temos que a energia total do sistema será dada por:

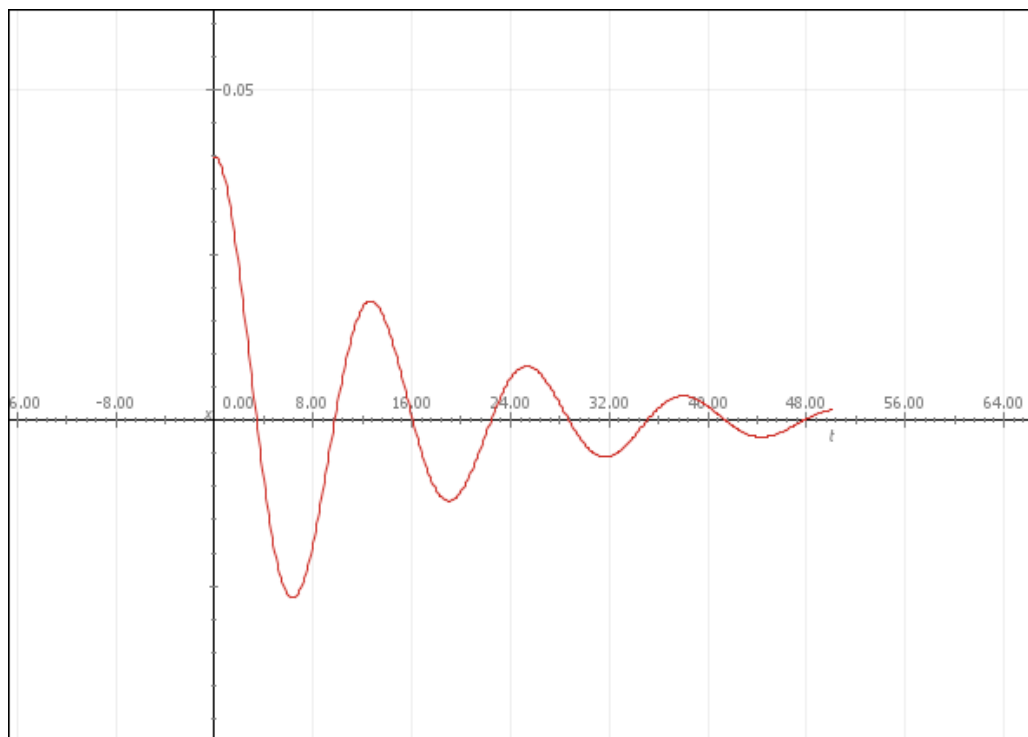
$$E = T + U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (4.5)$$

4.2 Harmônico Amortecido

No sistema harmônico amortecido o movimento cessará com o tempo, devido a forças resistivas, como resistência do ar, força de atrito, viscosidade de um material, dentre outras. A ação de forças dissipativas reduz o movimento até cessá-lo por completo. Na Figura 5 (posição x tempo) verificar-se a modelagem do movimento amortecido, considerando o modelo descrito na Figura 2 (b),

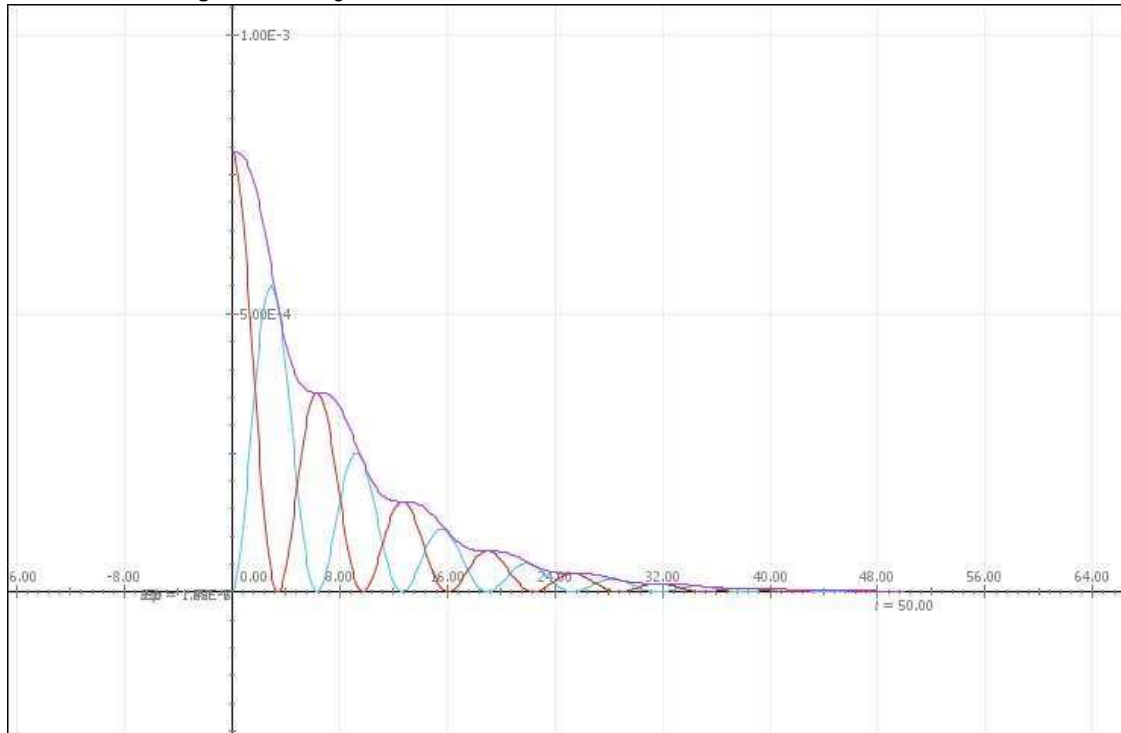
Figura 5: Modelagem de um Movimento Amortecido resultante do software Modellus.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Ao contrário do caso de um oscilador harmônico simples, a energia de um oscilador amortecido não é constante com o tempo. Em vez disso, é constantemente dissipado e convertido em calor ou outras formas de energia. Na Figura 6 é mostrado o comportamento das energias presentes no sistema amortecido: a energia cinética (azul), energia potencial (vermelho) e energia mecânica (roxo).

Figura 6: Energias do Movimento Amortecido resultante do software Modellus.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Como mencionado a energia total do sistema não é constante. Isso devido a variação da amplitude com o tempo, que ocorre devido a implementação do parâmetro de amortecimento que dissipa a energia fazendo com que o sistema diminua a movimentação. A energia cinética e potencial, também cessaram com o tempo.

Para demonstrar o Movimento harmônico amortecido, usamos o exemplo a seguir:

Considerando uma massa m pendurada na vertical sob a influência de duas forças, uma força restauradora e uma força resistiva, pode-se descrever o comportamento do movimento aplicando a segunda lei de Newton no dispositivo de amortecimento,

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{F}_d = m \cdot \vec{a} \\ -kx - b \frac{dx}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

Dividindo a Eq. (6) por m obtemos a equação diferencial do movimento livre amortecido:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{b}{2m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

em que $\beta = \frac{b}{2m}$ é o parâmetro de amortecimento e $\omega^2 = \frac{k}{m}$ é a frequência angular.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0\quad (4.7)$$

Para resolver a equação linear (7), possibilitando surgir a equação característica, a função, a derivada primeira e a derivada segunda devem formar uma combinação linear idêntica e nula. Para isso ocorrer a função tem que ser proporcional a derivada primeira e a derivada segunda. Analogicamente, as funções que são proporcionais as suas derivadas de ordem n são do tipo exponencial. Portanto, a equação característica é

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0$$

O símbolo 2β é utilizada apenas por conveniência algébrica. Isso porque, a equação característica e as suas raízes – a aplicação da fórmula de Bhaskara é possível determinar as raízes correspondente – são,

$$\begin{cases} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Conforme o sinal de $\beta^2 - \omega^2$, podemos particularizar três casos gerais: subamortecido, amortecimento crítico e sobreamortecimento. Salientando que, em cada caso a solução apresenta o fator de amortecimento $e^{-\beta t}$, $\beta > 0$, no decorrer do tempo a massa torna-se desprezível.

Caso I: $\beta^2 - \omega^2 > 0$, nesse caso o sistema é dito superamortecido, visto que, o parâmetro de amortecimento β é maior quando comparado a frequência angular ω . A solução para (2.8)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ x(t) &= e^{-\beta t} (c_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t}) \end{aligned}$$

Caso II: $\beta^2 - \omega^2 = 0$, nessa situação o sistema é dito criticamente amortecido. Isto poque, qualquer declínio na força de amortecimento ocasiona o movimento oscilatório.

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + t c_2 e^{r_1 t} \\ x(t) &= e^{-\beta t} (c_1 + t c_2) \end{aligned}$$

Caso III: $\beta^2 - \omega^2 < 0$, tal caso dizemos que o sistema é subamortecido, visto que, o parâmetro de amortecimento β é menor quando comparado a frequência angular ω . Dessa forma, as raízes m_1 e m_2 são complexas:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}, r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \\ x(t) &= e^{-\beta t} (c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \beta^2} t + c_2 \sen \sqrt{\omega^2 - \beta^2} t) \end{aligned}$$

Para casos de Movimento forçado com amortecido, temos:

No movimento com amortecimento, considerando uma força externa $F(t)$ agindo sobre o sistema com a massa vibrante em uma mola, onde $F(t)$ representa uma força que gera um movimento oscilatório na vertical. Nesse sistema, ha presença de forças internas e externas, para determinar essas forças, consequentemente a equação do movimento forçado com amortecimento, recorre-se a segunda lei de Newton, resultando na equação diferencial,

$$\begin{aligned} F &= -kx - b \frac{dx}{dt} \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dividindo a Eq. (8) pela massa m , temos a equação diferencial do movimento forçado com amortecido, e fazendo as seguintes identificações na equação $b/m = 2\beta$, $\omega^2 = k/m$, $F(t)/m = f(t)$. Então, temos

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (4.9)$$

Essa expressão é uma equação não-homogênea. Para sua solução utilizar-se o método dos coeficientes indeterminados.

Para os Movimento forçado sem amortecido, temos:

O movimento forçado sem amortecimento refere-se a um tipo de oscilação ou vibração em que um sistema é submetido a uma força externa periódica, mas não há forças dissipativas (como o atrito) para amortecer as oscilações. Então,

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

em que F_0 é a amplitude da força, ω a frequência de excitação e φ o ângulo da fase.

$$\begin{cases} F(t) = F_0 \cos(\gamma t + \varphi) \\ F(t) = F_0 \text{sen}(\gamma t + \varphi) \end{cases} \quad (4.10)$$

Para determinamos a equação do movimento forçado sem amortecimento, usamos a Eq. (2) e igualamos uma das expressões da Eq. (10), logo temos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \omega^2 x &= F(t) \\ m\ddot{x} + kx &= F_0 \text{sen} \gamma t, x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que F_0 é uma constante e $\gamma \neq \omega$.

A expressão (11) é uma equação diferencial não-homogênea. Portanto, para obter a solução é necessário definir uma solução particular e uma complementar. Nesse caso, a função complementar é dada por: $x_c(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t)$. Com relação a solução particular, usa-se a $x_p(t) = A \cos(\gamma t) + B \text{sen}(\gamma t)$ de tal maneira que

$$x''p + \omega^2 xp = F_0 \text{sen} \gamma t$$

$$A(\omega^2 - \gamma^2) \cos(\gamma t) + B(\omega^2 - \gamma^2) \text{sen}(\gamma t) = F_0 \text{sen} \gamma t$$

Igualando os coeficientes, temos $A = 0$ e $B = F_0 \text{sen} \gamma t / (\omega^2 - \gamma^2)$. Então,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \text{sen} \gamma t$$

Aplicando as condições iniciadas dadas, obtemos à solução geral

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \text{sen} \gamma t$$

as constantes $c_1 = 0$ e $c_2 = -\gamma F_0 / \omega (\omega^2 - \gamma^2)$. Dessa maneira, a solução será

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \text{sen} \omega t + \text{sen} \gamma t), \omega \neq \gamma. \quad (4.12)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As equações diferenciais são uma área importante da matemática que lida com funções e suas taxas de variação. O estudo das equações diferenciais envolve a análise das soluções dessas equações e a compreensão de como os sistemas evoluem com base nas condições iniciais e nas equações que os descrevem. As EDOs de 2ª ordem descrevem alguns dos sistemas mecânicos. Esse trabalho foi desenvolvido com a finalidade de motivar o estudo das equações diferenciais, apresentado um modelo de estudo sobre as equações diferenciais lineares de segunda ordem, abordamos por completo definições, classificações, teorizações e provamos métodos de soluções, como a equação característica para a resolução de problema e também o método dos coeficientes indeterminados. Em vibrações mecânicas foi exposto um estudo de alguns sistemas mecânicos, analisando e identificando as equações que regem os movimentos vibratórios, considerando o sistema com vibrações livres ou sobre o efeito

vibrações forçadas, comprovando que de fato são descritos pelas equações diferenciais lineares de 2ª ordem.

Em busca de maior aplicabilidade foi utilizado o Modellus em dois problemas, no qual possibilitou a visualização dinâmica, interatividade e reprodução de simulação realistas do movimento harmônico simples e do movimento amortecido. Além de promover um feedback instantâneo e interação com a teoria. O software pode ser utilizado na resolução de problemas práticos associados a vibrações mecânicas, proporcionando aos alunos uma aplicação direta dos conceitos teóricos em situações do mundo real, a exemplo disso, simulação de vibrações em estruturas (pontes e edifícios), análise de Vibrações em Veículos (Chassis e Suspensões de Veículos), análise Dinâmica de Turbinas Eólicas, dentre outros. Integrar o Modellus no ensino de equações diferenciais certamente proporciona aos alunos uma abordagem prática e visual, contribuindo para uma compreensão aprofundada dos conceitos teóricos e incentivando uma aprendizagem mais ativa.

AGRADECIMENTOS. Esta pesquisa teve o apoio institucional (estrutura física e pessoal) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI Campus Oeiras

CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES. MINC, JLS: Conceituação; Metodologia, Software, Curadoria de dados, Análise formal, Redação – rascunho original, Visualização, Investigação, Validação; MINC: Redação – revisão e edição, Aquisição de financiamento, Administração do projeto, Recursos; JLS: Supervisão. Todos os autores participaram ativamente da discussão dos resultados, revisaram e aprovaram a versão final do artigo.

CONFLITO DE INTERESSE. Os autores declaram que não têm interesse comercial ou associativo que represente um conflito de interesses em relação ao manuscrito.

APROVAÇÃO ÉTICA. Não se aplica.

REFERÊNCIAS

AMORIM, E. S. A. **O uso do software Modellus como ferramenta auxiliar no ensino de física: uma aplicação da cinemática.** 2018, 56f. Dissertação (Mestrado Profissional de Ensino de Física), Universidade Federal do Acre – UFAC, Rio Branco, 2018. Disponível em: <https://www2.ufac.br/mnpef/menu/dissertacoes/2016/edilucio-siqueira-de-almeida-amorim.pdf>. Acesso em: 03 de mar. de 2022.

ANDRADE, M. E. **Simulação e modelagem computacional com o software Modellus: aplicações práticas para o ensino de física.** 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

COSTA JUNIOR, J. R. G.; SILVA, A. C.; BRITO, A. V. S. Software Modellus: uma ferramenta didática da modelagem Matemática no ensino/aprendizagem de Física. In: **XX Simpósio Nacional do Ensino de Física. O Ensino de Física nos últimos 40 anos: balanços, desafios e perspectivas.** São Paulo, 2013. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xx/sys/resumos/T1003-1.pdf>. Acessado em: 20 de jan. 2021.

SOUSA FILHO, E. **O ensino e aprendizagem de oscilações por meio do software modellus.** 2020, 88f. Dissertação (Mestrado Profissional de Ensino de Física) - Instituto Federal do Amazonas, Manaus,

2020. Disponível em: <http://repositorio.ifam.edu.br/jspui/bitstream/4321/894/1/O%20ensino%20e%20aprendizagem%20de%20oscila%C3%A7%C3%B5es%20por%20meio%20do%20software%20Modellus%20Sousa%20Filho%202020.pdf>. Acesso em: 20 de mar. de 2022.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de Física: eletromagnetismo**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

KELLY, S. G. **Fundamentals of Mechanical Vibrations**. 2 ed. Singapore: McGraw-Hill, 2017.

PEREIRA, A. L. F. **Aplicação de equações diferenciais no estudo de vibrações mecânicas**. Universidade Federal Rural do Semi – Árido, Angicos, Rio Grande do Norte, 2020.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

VEIT, E. A.; TEODORO, V. D. Modelagem no ensino: aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 87-96, 2002. DOI 10.1590/S1806-11172002000200003. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NjZPGDLdySCDR5zMnYDp9Wh/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 02 de mar. 2021.

ZILL, D. G; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learnig, 2016.